

## النوع الثالث

$f$  قابلة  $f(z_0) = A$   
 $z \rightarrow z_0$  للإصلح

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  إذا كان  $z \rightarrow z_0$

ولا يمكن القول  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  بل  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$

لكن  $f$  نقطة حادة  
 منزلة للدالة  $f(z_0)$   
 فنقول عن نقطة حادة  
 أسية للدالة  $f$  إذا  
 حقق إذا كان  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$   
 موجودة  
 غير موجودة  $z \rightarrow z_0$

## مثال

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

حيوية تعريف الدالة الأسية  
 في حيوية تعريف الأس

وهذه الدالة غير معرفة في  $z=0$   
 وبالنسبة  $z \rightarrow 0$  نقطة حادة

نلاحظ أن  $z \rightarrow 0$  نقطة حادة منزلة للدالة العكسية  
 لنفرض  $z \rightarrow 0$  ونلاحظ أن المحور الأفقي

$$z = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$z \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0$$

وبما أن  $f$  غير معرفة في  $z=0$  فالتفصيل  $f(z)$  عند  $z=0$  غير ممكن  
 $z \rightarrow 0$  في نقطة حادة أسية

الدالة  $f(z) = \frac{1}{z}$  عند  $z=0$  ونلاحظ أن الدالة  $f(z)$  غير موجودة  
 مؤلف من هذه النقطة



$$|\alpha| e = 1$$

/ /

Salah

Salah

لنكن  $z$  نقطة حادة معزولة لـ  $f(z)$

لنكن  $z$  نقطة حادة معزولة لـ  $f(z)$

لنكن  $z$  نقطة حادة معزولة لـ  $f(z)$

لنكن  $z$  نقطة حادة معزولة لـ  $f(z)$

لنكن  $z$  نقطة حادة معزولة لـ  $f(z)$

لنكن  $z$  نقطة حادة معزولة لـ  $f(z)$

لنكن  $z$  نقطة حادة معزولة لـ  $f(z)$

لنكن  $z$  نقطة حادة معزولة لـ  $f(z)$

لنكن  $z$  نقطة حادة معزولة لـ  $f(z)$



Subject: \_\_\_\_\_

1 1

التمرين: لنفرض أن الدالة  $f$  التحليلية :  
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$   $0 < |z-z_0| < R$   
 $z$  نقطة داخلية قريبة من  $z_0$

ملاحظة: وفي حال كان لدينا المتسلسلة عموماً، ولكن  $a_0$  موجودة  
 وبالمثل، كل أصفار  $f$  لا تكون أيضاً  $z$  قابلة  
 للإلغاء.

مثال:  $f(z) = \frac{z(e^z - 1 - z)}{z^2}$

الحل: الملاحظة:  $z$  نقطة داخلية للدالة لأن الدالة غير صفرية  
 وبالمثل، غير صفرية وبالتالي، غير قابلة للإلغاء.  
الآن تبين نوع: أصفار  $f$  التي تكون  $z=0$  هي من الدرجة 2.

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots$$

$$e^z - 1 - z = \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots$$

$$z(e^z - 1 - z) = \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{3!} z^4 + \frac{1}{4!} z^5 + \dots + \frac{1}{n!} z^{n+1} + \dots$$

$$f(z) = \frac{z(e^z - 1 - z)}{z^2} = 1 + \frac{1}{3!} z + \frac{1}{4!} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^{n-1} + \dots$$

ملاحظة: إذا كانت النقطة  $z_0$  قابلة للإلغاء للدالة  $f$

نكتب  $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$  حيث  $g(z_0) \neq 0$



عرف الدالة  $f$  في  $z_0$  تصعب دالة تحليلية. 1- نلاحظ ان  $f$  متصلة في  $z_0$  ونفرض ان  $f$  متصلة في  $z_0$ .  
 Subject: تأخذ الدالة  $f$  في  $z_0$  متصلة في  $z_0$ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

عنينة يكون

$$z \rightarrow z_0$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad z_0 = 0$$

الدالة  $f$  متصلة في  $z_0$  هو ان  $f$  متصلة في  $z_0$  و  $f$  متصلة في  $z_0$  و  $f$  متصلة في  $z_0$ .

ان

مثال 2: إذا وضحنا  $f(z) = a$  تصعب الدالة  $f$  معرفة مستمرة  
 و تحليلية عند النقطة  $z_0$  أي تم إزالة التدرج عن هذه  
 النقطة. إذا وضحنا  $f(z) = a$  قيمة الثابت تكون نقطة مستمرة  
 دالة تحليلية.

مثال (2) لتكن لدينا الدالة  $f(z) = \frac{chz - 1}{z^2}$   $ch\{0\}$

أما عرف الدالة  $f$  لتكن تحليلية عند  $f(z)$

أو أمه متسورة الدالة

$$chz = 1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots + \frac{1}{(2n)!} z^{2n} + \dots$$

$$chz - 1 = \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots + \frac{1}{(2n)!} z^{2n} + \dots$$

$$\frac{chz - 1}{z^2} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} z^2 + \dots + \frac{1}{(2n)!} z^{2n-2} + \dots$$

نتيجة أي  $z=0$  نقطة مستمرة قابلية للإصلاح  
 الحد الرئيسي من شتات معدوم.

الآن قريفة الدالة  $f(z) = \frac{chz - 1}{z^2}$  ;  $z=0$  ;  $z=0$



والنقطة (a) يمكن صيانتها تقريباً آف للنقطة البعيدة القابلة للإزالة  
تكون النقطة البعيدة البعيدة نقطة  $\infty$  إذا كانت  
إذا كان الزاوي الرئيسي للثلاثية معصم.



العلاقة بين الانقطاع والشرط

ملاحظة لنكن  $z_0$  نقطة بعيدة البعيدة للنقطة  $f$  ان شرط الاسم  
والكافي لكي تكون النقطة  $z_0$  قطباً للنقطة  $m$  هو ان يكون للنقطة  
 $f$  شذوشت التي في الجوار  $z_k$   $z_0$   $k \rightarrow \infty$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

$b_m \neq 0$

درجته

نقول ان نقطة  $z_0$  قطباً إذا كان الزاوي الرئيسي له محدود.

من الدرجة أعلى  $m$  أي  $m$

ملاحظة في المبرهنات السابقة نضع بأن النقطة  $z_0$  تكون قطباً إذا كانت  
إذا كان الزاوي الرئيسي يكون من محدود من النقص.

أما أعلى رتبة من هذه الحدود هو رتبته.

ودرجة أقل من هذه الحدود ذات لقول البقية هي رتبة هذا القطب.

كذلك يمكن أن نقول ان النقطة  $z_0$  قطباً لاتباع هذه الحالة عند أي نقطة.

ملاحظة إذا كانت  $z_0$  قطباً فإن  $f(z) \rightarrow \infty$  كـ  $z \rightarrow z_0$



Subject: \_\_\_\_\_

/ /

فإن عندنا  $0 < \delta < \epsilon$  يوجد  $0 < \delta < \epsilon$  بحيث أن

$$|P(z)| > \frac{1}{\delta} \quad \text{و} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow 0 < |P(z)| < \epsilon$$

$P(z) \neq 0$  لا يتفق مع أي نقطة من نقاط هذا الجوار.

على سبيل المثال

لنأخذ المبرهنة السابقة يكون للمالة  $P$  شكل

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

$$P(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \left[ c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_{m-1} (z - z_0)^{m-1} + \right.$$

$$\left. + a_0 (z - z_0)^m + a_1 (z - z_0)^{m+1} + \dots \right]$$

$$P(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} Q(z) \quad \text{أي أن}$$

بالإضافة للعلاقة السابقة نستنتج ما ذكره في بداية فضاء شينجوان  
 $Q(z) = 0$  أيضاً لا تتفق مع أي نقطة من نقاط هذا الجوار  $0 < |z - z_0| < \delta$

ملاحظة إذا كانت  $z_0$  قطب للمالة  $P$  من رتبة  $m$  فإنه

$$P(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} Q(z) \quad Q(z) \neq 0$$

لنأخذ  $z_0$  نقطة من مجموعة النقاط للمالة  $P$

المرم المارم والمكان يمكن أن يكون  $z_0$  نقطة من مجموعة النقاط للمالة

بشكل المالة  $P$  التبادلي

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

FUTURE



Subject: \_\_\_\_\_

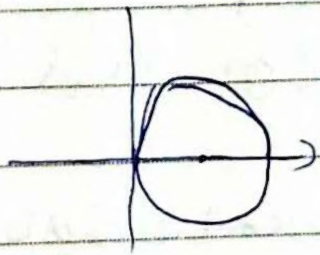
من هذه المبرهنة نستنتج  $z$  تكون نقطة حافة أو نقطة داخلية  
 معطاة إذا كان الزاوية الرئيسية  $z$  تكون عدد طبيعي محدود.

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots$$

نلاحظ أن الزاوية الرئيسية  $z$  تكون عدد طبيعي محدود فذا لمورد  $z$  فإن  
 نقطة  $z=0$  نقطة حافة أو نقطة داخلية.

مثال أوجد منسب الدالة

$$f(z) = \frac{z+2}{z(z-1)}$$



في النقاط  $z=1$  و  $z=0$

نلاحظ أن  $(z-1)$  ليس عدد طبيعي

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \left( \frac{z+2}{z} \right) = \frac{1}{(z-1)} \left( 1 + \frac{2}{z} \right)$$

$$= \frac{1}{z-1} \left( 1 + 2 \frac{1}{1+(z-1)} \right) = \frac{1}{z-1} \left( 1 + 2(1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots + (-1)^n (z-1)^n + \dots \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \left[ 3 - 2(z-1) + 2(z-1)^2 - 2(z-1)^3 + 2(z-1)^4 - \dots + 2(-1)^n (z-1)^n + \dots \right]$$

$$f(z) = \frac{3}{z-1} - 2 + 2(z-1) - 2(z-1)^2 + 2(z-1)^3 - \dots + 2(-1)^n (z-1)^n + \dots$$

بما أن الزاوية الرئيسية  $z$  تكون عدد طبيعي محدود فذا لمورد  $z$  فإن

نلاحظ أن  $z=1$  نقطة حافة أو نقطة داخلية.

نلاحظ أن  $(z-1)$  ليس عدد طبيعي



Subject:

~~2~~ ~~موضوع~~

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$$

$$0 < |z|$$

$$p(z) = \frac{z+2}{z(z-1)^3}$$

أوجد متسورة لالة  $p(z)$

$$0 < |z-1|$$

(جميع، كسر دن النكر  $(z-1)$ )

$$p(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \left[ 1 + \frac{2}{z} \right]$$

لاستخرج جميع كسور دن  $(z-1)$   
نجمع كل واحد

$$p(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \left[ 1 + 2 \frac{1}{1+z-1} \right]$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2} \left[ 1 + 2(1 - (z-1) + (z-1)^2 + \dots + (-1)^n (z-1)^n + \dots \right]$$

$$p(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \left[ 3 - 2(z-1) + 2(z-1)^2 + \dots + 2(-1)^n (z-1)^n + \dots \right]$$

$$p(z) = \left[ \frac{3}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)} \right] + 2 - 2(z-1) + 2(z-1)^2 - \dots$$

نستخرج هنا  $z$  قطب لأن عدد حد من  $z$  ليس فيه  
وبما  $b_2 = 3 \neq 0$  وهو من الدرجة الثانية لأن  $b_2 = 3 \neq 0$





Subject: \_\_\_\_\_

/ /

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$$

$$0 < |z|$$

آفة المستوي

نقطة النقطة  $z=0$

$$f(z) = \frac{1}{z^5} \left[ z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 + \frac{1}{9!} z^9 - \dots \right]$$

$$f(z) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} z^2 + \dots$$

وبما أن  $z=0$  نقطة قطب من الرتبة الرابعة لأن

عدد الحدود الجزئية في حدود فالتالي  $m=4$



العلاقة بين الرتبة  $m$  والقطب

إذا كان  $z_0$  من الرتبة  $m$  لـ  $f(z)$  عند  $z_0$  يكون  $z_0$  قطب

من الرتبة  $m$  لـ  $\frac{1}{f(z)}$

$$f(z), z(z-1)$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^4} = \frac{1}{g(z)} \quad \text{الآن نلاحظ } z=1, z=3$$

نقطة  $z=3$  هي نقطة بسيطة (1)

ولذلك الرتبة الأولى  $m=1$

نستنتج أن  $z=3$  قطب من الرتبة  $m$

$$\frac{1}{z(z-1)}$$

$$h(z) = z(z-1)^2$$

قطب من الرتبة الثانية  $z=1$

بما أن  $z=0$  هو



Subject: \_\_\_\_\_

مبرهنة لورانت: إذا كانت  $z_0$  قطب للمالة  $f$  هذا التبعاً عندها يكون  

$$\frac{1}{f(z)}$$

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^{-1} \frac{1}{g(z)}$$

البيان

وهذا يعني أن  $z_0$  من الدرجة 1

ملاحظة: إذا كانت  $z_0$  نقطة مقام وتسمى بسطة نأخذ الفرق بين  
 الرتبة  $5$   $\frac{\sin z}{z^5} = \frac{0}{0}$  فيكون  $5 - 1 = 4$

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

ملاحظة: إذا كانت المالة  $f(z)$  هذا  $h(z)$

$z_0$  من الدرجة  $n$   $z_0$  من الدرجة  $m$   $m > n$  فيكون  $z_0$  قطب  
 للمالة  $f$  من الدرجة  $(m - n)$

أما إذا كان  $m < n$  عندها يكون  $z_0$  نقطة صفر قابلة للإزالة

$$f(z) = \frac{z^3 - z^2}{e^z - 1 - z}$$

لنأخذ لنا المقالة المالة

عند  $z = 0$  للمالة  $f$

نأخذ  $g(z) = z^3 - z^2$   $h(z) = e^z - 1 - z$   $g'(0) = 0$   $g''(0) = 0$   $g'''(0) = 6$

بالنسبة للمقام  $h(z) = e^z - 1 - z$

$$h'(0) = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$h''(0) = e^0 - 1 = 0$$

أيضاً  $z_0$  من المقام من الدرجة 3  $z_0$  من البسط من الدرجة 3

$z_0$  من المقام  $z_0$  من البسط



Subject: \_\_\_\_\_

نستنتج أن  $z=0$  نقطة حادة قابلة للإزالة.

بصفة إذا كان  $z$  قطباً للمادة  $P(z)$  عندها يمكن أن نكتب  $z=0$  نقطة حادة  
أولية للمادة  $Q(z) = \frac{f(z)}{e^{\frac{1}{z+i}}}$

مثال عن التقاطع حادة للمادة  $P(z) = \frac{1}{z+2} e^{\frac{1}{z+i}}$

النقطة الحادة  $z=-2$  و  $z=-1$

وذلك لأن  $z=-2$  قطب بسيط من الدرجة الأولى

وذلك لأن  $z=-2$  هو من الدرجة الأولى للمادة  $h(z) = z+2$

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{z+2}$$

وبالتالي فإن قطب للمادة  $h(z)$  بسيطاً  $z=-2$  و قطب للمادة

$$P(z) = \frac{1}{z+2} e^{\frac{1}{z+i}}$$

$z=i$  قطب بسيط للمادة  $\frac{1}{z+i}$  (لأنها من الدرجة الأولى)

$$(g(z) = z+i)$$

وبالتالي استناداً للدرجة فإن  $z=i$  تكون نقطة حادة

$$P(z) = \frac{1}{z+2} e^{\frac{1}{z+i}}$$